



TITLE:

# Examples of compact Einstein Kahler manifolds with positive Ricci tensor

AUTHOR(S):

坂根, 由昌

---

CITATION:

坂根, 由昌. Examples of compact Einstein Kahler manifolds with positive Ricci tensor. 数理解析研究所講究録 1985, 576: 154-176

ISSUE DATE:

1985-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99244>

RIGHT:

Examples of compact Einstein Kähler  
manifolds with positive Ricci tensor

阪大理 坂根由昌 (Yusuke Sakane)

0. Introduction

$P$  を complex dimension  $N$  の compact complex manifold  
とし,  $J$  により  $P$  の complex structure を表す。  $g$  を  $P$  上の  
hermitian metric とするとき,  $\omega(X, Y) = g(X, JY)$  ( $X, Y$   
は  $P$  の tangent vector) により  $P$  上の Kähler form  $\omega$  が  
定義されるが,  $d\omega = 0$  のとき,  $(P, J, g)$  は Kähler であ  
るという。  $\kappa$  により Kähler metric  $g$  の Ricci tensor  
を表すと,  $\kappa$  は hermitian となり Ricci form  $\rho$  が  
 $\rho(X, Y) = \kappa(X, JY)$  により定義される。よく知られてい  
るように, 第2 Bianchi identity から  $d\rho = 0$  となり  $\rho$  は  
type  $(1, 1)$  の cohomology class を定義し,  $P$  の first Chern  
class  $c_1(P)$  は

$$\frac{1}{2\pi} [\rho] = c_1(P)$$

で与えられる。  $(P, J, g)$  が Einstein Kähler であると

すると,  $\rho = k\omega$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) となり

$$(1) \quad k > 0 \rightarrow c_1(P) > 0$$

$$(2) \quad k = 0 \rightarrow c_1(P) = 0$$

$$(3) \quad k < 0 \rightarrow c_1(P) < 0$$

となる。逆に,  $(P, J, g)$  を compact Kähler manifold で first chern class  $c_1(P)$  が正, 零, 負であるものとするとき,  $(P, J)$  上に Einstein Kähler metric が存在するかという問題が考えられるが, これはよく知られているように, (3) に対応するとき, すなわち, 負のときは, Aubin [1] と Yau [10] により独立に, Einstein Kähler metric の存在と一意性が証明された。また (2) に対応するとき, すなわち, 零のときは, いわゆる Calabi 予想が成り立つこととして, 各 Kähler class に vanishing Ricci tensor をもつ Kähler metric が一意的に存在することが Yau [10] により証明された。一方 (1) に対応するとき, すなわち, first chern class  $c_1(P)$  が正のときは, 一般には反例, Einstein Kähler metric の存在しないもの, があり逆は成り立たない。最近 Bando-Mabuchi [2] によって, (holomorphic automorphism を除いて) Einstein Kähler metric の一意性が first chern class が正のときにも証明された。また first chern class が正である compact Einstein Kähler

manifolds のよく知られた例としては, Kähler C-space, すなわち, simply connected compact Kähler homogeneous space がある. ここでは non-homogeneous Einstein Kähler manifolds の例を構成する.

### 1. Obstruction theorems と 反例.

$(P, J, g)$  を compact Kähler manifold とするとき,  $\mathcal{G}(P, J)$  により  $P$  上の holomorphic vector fields 全体のなす Lie algebra,  $\mathcal{K}(P, g)$  により  $P$  上の Killing vector fields 全体のなす Lie algebra とすると,  $\mathcal{K}(P, g) \subset \mathcal{G}(P, J)$  とみなせるが,  $g$  が Einstein Kähler metric のときは, 次の Matsushima の定理がなりたつ.

Theorem M [7]  $(P, J, g)$  を Einstein Kähler manifold とするとき,  $\mathcal{G}(P, J) = \mathcal{K}(P, g) \oplus J\mathcal{K}(P, g)$ . 特に,  $\mathcal{G}(P, J)$  は compact Lie algebra  $\mathcal{K}(P, g)$  の複素化となり  $\mathcal{G}(P, J)$  は reductive Lie algebra となる.

松嶋の定理を用いて, Einstein Kähler metric の存在しない例は Yan [9] によって構成された.

例 1 (Yan)  $P$  を  $P^2(\mathbb{C})$  の一点を blow up して得られるもの, すなわち,  $P^1(\mathbb{C})$  上の hyperplane line bundle  $H$  と trivial line bundle  $1$  の直和  $1 \oplus H$  より

得られる  $P^1(\mathbb{C})$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle とするとき,  $\mathcal{G}(P, \mathcal{J})$  は reductive でないが, first chern class  $C_1(P)$  は正である.

Proposition 1.  $X$  を Kähler c-space とし,  $\xi$  を  $X$  上の non-trivial holomorphic line bundle とする.  $\xi$  と trivial line bundle  $1$  の直和  $1 \oplus \xi$  より得られる  $X$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P(1 \oplus \xi)$  を  $P$  で表す. このとき,  $P$  上の holomorphic vector fields 全体の Lie algebra  $\mathcal{G}(P, \mathcal{J})$  が reductive である必要十分条件は  $H^0(X, \xi) = H^0(X, \xi^{-1}) = (0)$  となることである. さらにこのとき,  $\mathcal{G}(P, \mathcal{J})$  は,  $\text{Aut}_0(X) \times \mathbb{C}^*$  の Lie algebra と一致する. (cf. [5, 8])

特別の場合として,  $H$  を  $P^n(\mathbb{C})$  上の hyperplane line bundle とするとき, Theorem M と Proposition 1 から次がわかる.

例 2.  $1 \leq a \leq n$  のとき,  $P(1 \oplus H^a)$  の first chern class は正となるが,  $P(1 \oplus H^a)$  上には Einstein Kähler metric は存在しない.

例 3.  $H_1, H_2$  を  $P^n(\mathbb{C}), P^m(\mathbb{C})$  の hyperplane line bundle からひきおこされた  $P^n(\mathbb{C}) \times P^m(\mathbb{C})$  上の holomorphic line bundle とする. 整数  $a, b$  に対して  $P_{a,b} = P(1 \oplus H_1^{-a} \oplus H_2^b)$  とおくとき,  $|a| \leq n, 0 \leq b \leq m$  ならば  $P_{a,b}$  の first chern class は正となるが,  $-m \leq a \leq 0, 0 \leq b \leq m$ ,

$(a, b) \neq (0, 0)$  ならば,  $P_{a,b}$  上には Einstein Kähler metric は存在しない. また  $1 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq m$  ならば,  $\mathcal{Y}(P_{a,b}, J)$  は  $sl(n+1, \mathbb{C}) \times sl(m+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$  と同型な Lie algebra となる.

次に Futaki invariant を思い出しておく.  $(P, J, g)$  を first Chern class  $C_1(P)$  が正である compact Kähler manifold とし,  $C_1^+(P) = \{ \omega \in C_1(P) \mid \omega \text{ は positive closed type } (1,1) \text{ real } 2\text{-form} \}$  とおく.  $\omega \in C_1^+(P)$  に対する Ricci form を  $\rho_\omega$  で表すと,  $P$  上の  $\mathbb{C}^m$ -function  $F$  で 
$$\frac{1}{2\pi} \rho_\omega - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dd'' F$$
 となるものが定数を加えることを除いて一意的に存在する. この  $F$  を用いて, 写像  $f: \mathcal{Y}(P, J) \rightarrow \mathbb{C}$  を  $f(X) = \int_P X F \omega^N$  ( $N = \dim_{\mathbb{C}} P$ ) により定義する. このとき次の二本の定理がなりたつ.

Theorem F [4] linear map  $f: \mathcal{Y}(P, J) \rightarrow \mathbb{C}$  は  $\omega \in C_1^+(P)$  のとり方によらない. 特に,  $(P, J, g)$  が Kähler Einstein metric を許容すれば,  $f \equiv 0$  となる.

例 4 (Futaki [4])  $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P_{1,1}$  において,  $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$  上では恒等変換を引きおこす  $\mathbb{C}^*$ -action の holomorphic vector field  $X$  に対して,  $f(X) \neq 0$  となり,  $P_{1,1}$  ( $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle) は Einstein Kähler metric を許容しない. この例では,  $\mathcal{Y}(P_{1,1}, J)$  は reductive

な Lie algebra である。

これらが今までに知られた obstruction theorems と知られた反例のいくつかである。

## 2 Main theorem

$M$  を compact type の irreducible hermitian symmetric space とすると,  $M$  上の holomorphic line bundles の同型類のなす群  $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  は  $\mathbb{Z}$  と同型であることが知られている。  $L$  を first chern class  $c_1(L)$  が正となる holomorphic line bundle で群  $H^1(M, \mathcal{O}^*)$  の generator となるものとする。このとき  $M$  の first chern class  $c_1(M)$  は

$$c_1(M) = K c_1(L), \quad (K \text{ は } 2 \leq K \leq \dim_{\mathbb{C}} M + 1 \text{ なる整数})$$

をみたす。  $X = M_1 \times M_2$ ,  $M_1, M_2$  は compact type の irreducible hermitian symmetric space,  $K_1, K_2$  を  $M_1, M_2$  に対する chern class から定まる正の整数とする。

正の整数  $a, b$  で  $0 < a < K_1$ ,  $0 < b < K_2$  となるものに対し

て,  $X$  上の holomorphic line bundle  $L_1^{-a} \otimes L_2^b$

( $L_1, L_2$  は  $M_1, M_2$  上の line bundle の generator から成りおこされた  $X$  上の line bundle とする) を考え,  $P_{a,b}$

$= P(1 \oplus L_1^{-a} \oplus L_2^b)$  とおくと,  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P_{a,b}$  の

first chern class  $c_1(P_{a,b})$  は正で, Lie algebra  $\mathcal{G}(P_{a,b}, J)$

は,  $\text{Aut}_0(X) \times \mathbb{C}^*$  の Lie algebra と同型になる.

Main theorem [8]  $m = \dim_{\mathbb{C}} M_1$ ,  $n = \dim_{\mathbb{C}} M_2$  とおく. 上に定義した  $X = M_1 \times M_2$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P_{a,b}$  が Einstein Kähler metric を許容するため必要十分条件は,

$$\int_{-1}^1 (k_1 - ax)^m (k_2 + bx)^n x dx = 0$$

である.

Corollary 1.  $M = M_1 = M_2$ ,  $a = b$  のとき,  $P_{a,a}$  上には Einstein Kähler metric が存在する.

Corollary 2.  $M_1 = P^1(\mathbb{C})$ ,  $M_2 \neq P^1(\mathbb{C})$  のとき,  $P_{1,b}$  上には Einstein Kähler metric は存在しない.

(Corollary 2 の証明は,  $\int_{-1}^1 (2-x)(k_2+bx)^n x dx \neq 0$  であることと各 compact type の hermitian symmetric space にわけて計算するが,  $b \geq 2$  のときこの積分が正となることは容易にわかる.)

さらに,  $M_1 \neq M_2$  なる場合で Einstein Kähler metric の存在するものの例としては次のようなものがある.

$M_1 = G_{6,2}^{\mathbb{P}}(\mathbb{C})$  ( $\mathbb{C}^6$  の中の 2-planes のなす complex grassmann manifold),  $M_2 = P^3(\mathbb{C})$  とすると,  $k_1 = 6$ ,  $k_2 = 9$  となり,  $P_{2,3}$  を考えると, 積分は  $\int_{-1}^1 (6-2x)^6 (9+3x)^3 x dx = 0$  となり,  $G_{6,2}(\mathbb{C}) \times P^3(\mathbb{C})$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P_{2,3} = P(L_1^2 \oplus L_2^3)$  は,



Einstein Kähler metric を許容する.

次に Main theorem の証明の方針を述べる.

$X$  を Kähler  $\mathbb{C}$ -space とすると,  $X$  は  $G/U$ , ここに  $G$  は simply connected complex semi-simple Lie group,  $U$  は  $G$  の parabolic subgroup と表わされる.  $\rho: U \rightarrow \mathbb{C}^*$  を  $U$  の holomorphic representation とし,  $\xi_\rho$  で  $\rho$  に associate した  $X$  上の homogeneous line bundle を表す.  $X$  上の各 holomorphic line bundle は homogeneous line bundle であることが知られている.  $X$  上の homogeneous holomorphic line bundle  $\xi_\rho$  に対して,  $X$  上の  $P(\mathbb{C})$ -bundle  $P(1 \oplus \xi_\rho)$  を考える. 群  $G$  は自然に  $P(1 \oplus \xi_\rho)$  に作用することに注意する. この  $G$  の作用に関して次がなりたつ.

Proposition 2.  $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$  は 3 つの  $G$ -orbit からなる. 1 つの orbit は  $P$  の open dense subset であり,  $\xi_\rho$  に associate した  $X$  上の principal  $\mathbb{C}^*$ -bundle であり, 他の 2 つの orbit は  $X$  と同型である. ただし,  $\rho$  は non-trivial であるとする.

$e$  を  $G$  の単位元とし,  $(e, (1, 1)) \in G \times \mathbb{C}^2$  に対応する  $P(1 \oplus \xi_\rho)$  の点を  $\phi$  で表すとき,  $\phi$  における  $G$  の isotropy subgroup  $\widehat{U}$  は  $\widehat{U} = \{g \in U \mid \rho(g) = 1\}$  で与えられる. 従って,  $\rho$  が non-trivial のとき,  $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{U} = \dim_{\mathbb{C}} U - 1$  である.

$G_u$  を  $G$  の maximal compact subgroup とし,  $V = U \cap G_u$  とおくとき,  $G/U$  と  $G_u/V$  とは diffeomorphic となり,

$\widehat{V} = \{g \in V \mid p(g) = 1\}$  とおくと,  $p$  が non-trivial のとき,  $\dim_{\mathbb{R}} \widehat{V} = \dim_{\mathbb{R}} V - 1$  となる.

Proposition 3.  $p: U \rightarrow \mathbb{C}^*$  を non-trivial とするとき, principal  $\mathbb{C}^*$ -bundle  $G \times_p \mathbb{C}^*$  は,  $G_u \times S^1$ -equivariant に  $G_u/\widehat{V} \times \mathbb{R}_+$  と diffeomorphic である, ことに,  $G_u \times S^1$  は  $\mathbb{R}_+$  に trivial に作用する.

さて  $P = P(1 \oplus \mathfrak{p})$  上に Einstein Kähler metric が存在すれば, それは  $G_u \times S^1$ -invariant metric であることに注意して,  $P$  の open orbit  $G \times_p \mathbb{C}^*$  上の  $G_u \times S^1$ -invariant Kähler metric の形を考える.  $\mathfrak{g}_u, \mathfrak{v}, \widehat{\mathfrak{v}}$  を  $\mathfrak{g}_u, V, \widehat{V}$  の Lie algebra とし,  $\langle, \rangle$  を  $\mathfrak{g}_u$  の Killing form から定義される  $\mathfrak{g}_u$  上の  $\text{Ad}(G_u)$ -invariant inner product とする.

$\mathcal{M}$  を  $\langle, \rangle$  に関する  $\mathfrak{v}$  の orthogonal complement とし,  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}$  を  $\widehat{\mathfrak{v}}$  の  $\mathfrak{v}$  における  $\langle, \rangle$  に関する orthogonal complement とし,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}} + \mathcal{M}$  とおくと,

$$\mathfrak{g}_u = \widehat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \widehat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}] = (0)$$

$[\mathfrak{v}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{M}$  となる. また  $G \times \mathbb{C}^*$  の Lie subgroup  $G_u \times \mathbb{R}_+$  は  $G \times_p \mathbb{C}^* \cong G_u/\widehat{V} \times \mathbb{R}_+$  に transitively 作用する.

$\mathbb{R}_+$  の Lie algebra の a basis を  $\{H\}$  とし,  $v \in G \times_p \mathbb{C}^*$  にお

1)  $\text{tangent space } T_0(P)$  と  $\mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$  とを同一視する.

$\mathcal{G}_n \oplus R\hat{H} = \hat{v} \oplus \mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$ ,  $Ad(\hat{V})(\mathfrak{g} \oplus R\hat{H}) \subset \mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$  となることに注意する.  $G \times_P \mathbb{C}^*$  (あるいは  $P$ ) 上の complex structure  $J$  は  $G \times \mathbb{C}^*$  の action が invariant であるから linear isomorphism  $I: \mathfrak{g} \oplus R\hat{H} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$  であり,  $I^2 = -id$ ,  $I \circ Ad(g) = Ad(g) \circ I$  ( $g \in \hat{V}$ ) なるものをひきおこす. さらに,  $I$  は,  $IL_{\mathfrak{g}} = R\hat{H}$  をみたし,  $X = G/U = G_n/V$  上の invariant complex structure とも compatible であるから  $I m = m$  をみたす.

$X$  が compact type の irreducible hermitian symmetric space  $M_1, M_2$  の積  $M_1 \times M_2$  のときには,  $\mathcal{G}_n = (\mathcal{G}_1)_n \oplus (\mathcal{G}_2)_n$ ,  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  は simple Lie algebra,  $m = m_1 \oplus m_2$ ,  $m_i \subset (\mathcal{G}_i)_n$  ( $i=1, 2$ ) となり, さらに  $[\hat{v}, m_i] = m_i$  ( $i=1, 2$ ),

$I m_i = m_i$  ( $i=1, 2$ ),  $m_i$  ( $i=1, 2$ ) は  $\hat{v}$ -module であり irreducible である. これより,  $\mathfrak{g} \oplus R\hat{H}$  上の  $Ad(\hat{V})$ -invariant hermitian inner product  $B$  は - 形式的に

$$B = d(\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{g}} + \langle I \cdot, I \cdot \rangle|_{R\hat{H}}) + c_1 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_1} + c_2 \langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_2}$$
 と表わされる. ここに  $d, c_1, c_2$  は正の実数,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{g}}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_1}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_2}$  は, inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から  $\mathfrak{g}, m_1, m_2$  上にそれぞれひきおこされた inner product,  $\langle I \cdot, I \cdot \rangle|_{R\hat{H}}$  は  $\langle IX, IY \rangle$  ( $X, Y \in R\hat{H}$ ) により定義される  $R\hat{H}$  上の内積を

表す。  $\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$  をそれぞれ,  $G/\widehat{V} \times \mathbb{R}_+$  上の  $G \times \mathbb{R}_+$ -invariant symmetric tensor  $\tau$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\mathfrak{g}}$ ,  $\langle I_0, I_0 \rangle|_{\widehat{RH}}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_1}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{m_2}$  ( $\text{Ad}(\widehat{V})$ -invariant symmetric bilinear form on  $\mathfrak{g} \oplus \widehat{RH}$  とみて) に対対応するものとする。さらに  $\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$  は right  $S'$ -action  $\tau$  invariant である。このことから、次の Proposition が証明できる。

Proposition 3.  $G \times_P \mathbb{C}^*$  上の  $G \times S'$ -invariant hermitian metric  $g$  は

$$(2.1) \quad g = F^2(\beta_0 + \beta_1) + H_1^2 \alpha_1 + H_2^2 \alpha_2$$

と表される。ここに  $F, H_1, H_2$  は  $G \times S'$ -invariant positive valued  $C^\infty$  function on  $G \times_P \mathbb{C}^*$  である。

$X \in \mathfrak{g}$  に対して,  $\{\exp tX \mid t \in \mathbb{R}\} \approx S'$  の right action によって引き起こされる  $G/\widehat{V} \times \mathbb{R}_+$  上の vector field を  $X^*$  と表し, 
$$H = - \frac{JX^*}{g(X^*, X^*)^{1/2}} \quad \text{とおく。}$$
  $G \times_P \mathbb{C}^*$  上の

$G \times S'$ -invariant hermitian metric  $g$  が (2.1) の形のものが Kähler metric になる条件を考える。

Proposition 4. (2.1) の形の metric  $g$  が Kähler であるための必要十分条件は  $\forall A, B \in \mathfrak{m}$ ,  $0 \neq X \in \mathfrak{g}$  に対して

$$- \frac{F}{\langle X, X \rangle^{1/2}} \langle X, [A, IB] \rangle + d(H_1^2)(H) \langle A, B \rangle|_{m_1} + d(H_2^2)(H) \langle A, B \rangle|_{m_2} = 0$$

がなりたつことである。

さらに  $G_n \times S^1$ -invariant hermitian metric  $g$  on  $G \times_P \mathbb{C}^*$  が Kähler であるとき,  $g$  の Riemannian connection  $\nabla$  について, vector field  $H$  は  $\nabla_H H = 0$  をみたすことがわかる. Compact Lie group  $G_n \times S^1$  が  $P = P(1 \oplus \mathfrak{p})$  上に holomorphic transformation group として作用するから  $P$  上には  $G_n \times S^1$ -invariant Kähler metric  $g_0$  が存在する.  $\bar{o} \in G_n/\bar{N}$  の原点とすると, 点  $C(t_0) = (\bar{o}, 1) \in G_n/\bar{N} \times \mathbb{R}_+$  を通る arc length を parametrized した  $(P, g_0)$  の geodesic  $C(t)$  として  $\dot{C}(t_0) = H_{C(t_0)}$  をみたすものを考える.  $\nabla_H H = 0$  より,  $C(t)$  は  $(\bar{o}, 1)$  を通る  $H$  の integral curve であり,  $L_0$  を  $P = P(1 \oplus \mathfrak{p})$  の  $G_n \times S^1$  の 2 つの singular orbit の  $C(t)$  の長さとするとき, 次のことが成り立つ.

#### Theorem 4.

(1)  $g_0$  を  $P = P(1 \oplus \mathfrak{p})$  上の  $G_n \times S^1$ -invariant Kähler metric とすると,  $g_0$  は open orbit  $G \times_P \mathbb{C}^*$  上で,

$$g_0 = dt^2 + f_0^2(t) \tilde{\beta}_0 + h_1^2(t) \alpha_1 + h_2^2(t) \alpha_2$$

と表わされる. ここに  $\tilde{\beta}_0$  は  $\mathfrak{p}$  の weight  $\Lambda$  に対して,

$\Lambda(x_0) = \sqrt{-1}$  で定まる  $[\mathfrak{p}]$  の元  $x_0$  を用いて,  $\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{\langle x_0, x_0 \rangle} \beta_0$  により定義される tensor (すなわち,  $P'(\mathbb{C})$  の  $S^1$ -action から right  $S^1$ -action  $\{ \exp t x_0 \mid t \in \mathbb{R} \}$  に対処するよりに (たまたま),  $f_0, h_1, h_2$  は  $[0, L_0]$  で定義された  $C^\infty$  function である).

次の条件をみたすもの:

$$(2.2) \begin{cases} f_0, h_j^0 \text{ は } (0, L_0) \text{ 上で正の値をとる,} \\ f_0 \text{ は } 0, L_0 \text{ で奇関数で, } f_0'(0) = -f_0'(L_0) = 1 \text{ を} \\ \text{みたし, } h_j^0 \text{ は } 0, L_0 \text{ で偶関数で, } h_j^0(0) > 0 \\ h_j^0(L_0) > 0 \text{ となる.} \end{cases}$$

(2) 逆に  $f(s), h_j(s) (j=1,2)$  が  $[0, L]$  で定義された  $C^\infty$  function で, 条件 (2.2) の性質をみたすものとする  
と, metric  $g = ds^2 + f(s)^2 \hat{\beta}_0 + h_1(s)^2 \alpha_1 + h_2(s)^2 \alpha_2$   
は open orbit  $G \times_P \mathbb{C}^*$  上で定義され,  $g$  は  $P(1 \oplus \mathfrak{g}_p)$   
上の  $C^\infty$  metric に拡張される.

(2) において,  $g$  が  $G \times_P \mathbb{C}^*$  上で Kähler であらば, 拡張された metric も  $P(1 \oplus \mathfrak{g}_p)$  で Kähler となることに注意する.

次に open orbit  $G \times_P \mathbb{C}^* = G_u / \sqrt{v} \times (0, L)$  上の metric  $g = ds^2 + f(s)^2 \hat{\beta}_0 + h_1(s)^2 \alpha_1 + h_2(s)^2 \alpha_2$  の Ricci tensor を計算するために, Bérard Bergery [3] に従って Riemannian submersion になっていることを利用する.  
metric  $g$  の開きから  $G_u / \sqrt{v} \times (0, L) \rightarrow (0, L)$  は Riemannian submersion となり, O'Neill の formula を用いることにより,  $R$  を  $g$  の Ricci tensor,  $\hat{R}$  を  $g_t$  の Ricci tensor と

するとき, 次の proposition をえる.

Proposition 5.  $X_0 \in \mathbb{C}_p$  を以前のように,  $\Lambda(X_0) = \sqrt{f}$  で定義されるものとし,  $m = m_1 \oplus m_2$  の orthonormal basis  $\{B_1, \dots, B_{2m}, C_1, \dots, C_{2n}\}$  ( $B_i \in m_1, C_i \in m_2$ ,  $m = \dim_{\mathbb{C}} M_1, n = \dim_{\mathbb{C}} M_2$ ) をとる.  $\{H, \frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \dots, \frac{1}{h_1}B_{2m}, \frac{1}{h_2}C_1, \dots, \frac{1}{h_2}C_{2n}\}$  は  $g$  の orthonormal basis であるが, これに対して次がなりたつ.

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}(H, H) &= -\left(\frac{f''}{f} + 2m \frac{h_1''}{h_1} + 2n \frac{h_2''}{h_2}\right) \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0\right) &= \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0\right) - \frac{f'}{f} \left(2m \frac{h_1'}{h_1} + 2n \frac{h_2'}{h_2}\right) - \frac{f''}{f} \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i\right) &= \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i\right) - \frac{f'h_1'}{fh_1} - \frac{h_1''}{h_1} - (2m-1)\left(\frac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2m \frac{h_1'h_2'}{h_1h_2} \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_i\right) &= \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_i\right) - \frac{f'h_2'}{fh_2} - \frac{h_2''}{h_2} - (2n-1)\left(\frac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2n \frac{h_1'h_2'}{h_1h_2} \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_i\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_2}B_i\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_j\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_j\right) = 0 \\ &\text{for } i \neq j \\ \mathcal{L}\left(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_2}C_j\right) &= 0 \quad (i, j). \end{aligned} \right.$$

さらに,  $\gamma_p = L_1^{-a} \otimes L_2^b$  ( $0 < a < \kappa_1, 0 < b < \kappa_2$ ) のとき, metric  $g = ds^2 + f(s)^2 \hat{\beta}_0 + h_1(s)^2 \alpha_1 + h_2(s)^2 \alpha_2$  が Kähler であるための必要十分条件は

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a}{2\kappa_1} f + 2h_1 h_1' &= 0 \\ \frac{-b}{2\kappa_2} f + 2h_2 h_2' &= 0 \end{aligned} \right.$$

で与えられることが, Proposition 4 を用いることによってわかる。また Ricci tensor  $\hat{\kappa}$  は次の Proposition のようになる。

Proposition 6.  $\mathcal{F}$  の orthonormal basis  $\{\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \dots, \frac{1}{h_1}B_m, \frac{1}{h_1}IB_1, \dots, \frac{1}{h_1}IB_m, \frac{1}{h_2}C_1, \dots, \frac{1}{h_2}C_n, \frac{1}{h_2}IC_1, \dots, \frac{1}{h_2}IC_n\}$  に対して,

$$\hat{\kappa}(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0) = 2m\left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{4h_1^4} + 2n\left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{4h_2^4}$$

$$\hat{\kappa}(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i) = \hat{\kappa}(\frac{1}{h_1}IB_i, \frac{1}{h_1}IB_i) = \frac{1}{2h_1^2} - \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{2h_1^4}$$

$$\hat{\kappa}(\frac{1}{h_2}C_j, \frac{1}{h_2}C_j) = \hat{\kappa}(\frac{1}{h_2}IC_j, \frac{1}{h_2}IC_j) = \frac{1}{2h_2^2} - \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{2h_2^4}$$

$$(i=1, \dots, m, j=1, \dots, n)$$

となる。

以上により, 次の定理を得る。

Theorem 7.  $X$  を 2 つの irreducible hermitian symmetric space of compact type  $M_1, M_2$  の直積  $M_1 \times M_2$  とし,  $X$  上の projective bundle  $P(1 \oplus L_1^{-a} \oplus L_2^k)$  を考える。  $G_n \times S^1$ -invariant metric  $g = ds^2 + f(s)^2 \tilde{\rho}_0 + h_1(s)^2 \omega_1 + h_2(s)^2 \omega_2$  on the open orbit が Einstein Kähler であるための必要十分条件は,  $f, h_1, h_2$  が次の ordinary differential equation を満たすことである。



$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2k_1} f + 2h_1 h_1' = 0 \\ -\frac{b}{2k_2} f + 2h_2 h_2' = 0 \\ -\left(\frac{f''}{f} + 2m \frac{h_1''}{h_1} + 2n \frac{h_2''}{h_2}\right) = \lambda \\ -\frac{f''}{f} - \frac{f'}{f} \left(2m \frac{h_1'}{h_1} + 2n \frac{h_2'}{h_2}\right) + 2m \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{4h_1^4} + 2n \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{4h_2^4} = \lambda \\ -\frac{h_1''}{h_1} - \frac{f' h_1'}{f h_1} - (2m-1) \left(\frac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2n \frac{h_1' h_2'}{h_1 h_2} + \frac{1}{2h_1^2} - \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2 \frac{f^2}{2h_1^4} = \lambda \\ -\frac{h_2''}{h_2} - \frac{f' h_2'}{f h_2} - (2n-1) \left(\frac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2m \frac{h_1' h_2'}{h_1 h_2} + \frac{1}{2h_2^2} - \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2 \frac{f^2}{2h_2^4} = \lambda \end{array} \right.$$

ここに  $\lambda$  は正の定数.

Ordinary differential equations (2.3) は次の differential equation と同値であることがわかる.

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{2k_1} f + 2h_1 h_1' = 0, \quad -\frac{b}{2k_2} f + 2h_2 h_2' = 0 \\ h_2' = \sqrt{y(h_2)}, \quad 2\lambda (ak_2 h_2^2 + bk_1 h_1^2) = ak_2 + bk_1 \\ \frac{dy}{dh_2} + 2\left(\frac{n+1}{h_2} - m \frac{ak_2}{bk_1} \frac{h_2}{h_1^2}\right) y = \frac{1}{2h_2} - \lambda h_2 \end{array} \right.$$

この最後の一階の線型常微分方程式の解は

$$y = \frac{1}{2h_2^{2(m+1)} (bk_1 h_1^2)^m} \left\{ \int h_2^{2m+1} (bk_1 h_1^2)^m (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2 + C \right\}$$

(ここに,  $C$  は定数で,  $h_1^2$  は  $ak_2 h_2^2 + bk_1 h_1^2 = \frac{1}{2\lambda} (ak_2 + bk_1)$  を

みたすものとする) によってえられる。

さて  $P(1 \oplus L_1^{-n} \oplus L_2^+)$  上に Einstein-Kähler metric  $g$  が存在すると仮定すると, Matsushima の定理により,  $g$  は  $G_n \times S^1$ -invariant metric と考えてよく,  $g$  は Theorem 7 の開りによい。また  $h_2'(0) = 0$  より  $y(h_2(0)) = 0$  で,  $y(h_2)$  は次のように表される:

$$y(h_2) = \frac{1}{2h_2^{2(m+1)} (h(K_1, h_1^2))^m} \int_{h_2(0)}^{h_2} h_2^{2m+1} (h(K_1, h_1^2))^2 (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2$$

さらに,  $y(h_2(L)) = 0$  より,

$$y(h_2(L)) = \frac{1}{2h_2^{2(m+1)}(L) (h(K_1, h_1^2(L)))^m} \int_{h_2(0)}^{h_2(L)} h_2^{2m+1} (h(K_1, h_1^2))^2 (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2$$

$= 0$ . また  $f'(0) = -f'(L) = 1$  を用いて,

$$h_2(L) = \sqrt{(1 + b/k_2)/2\lambda}, \quad h_2(0) = \sqrt{(1 - b/k_2)/2\lambda}.$$

がわかり,  $y(h_2(L)) = 0$  は次の積分が 0 となることと同値であることがわかる。

$$\int_{-1}^1 (K_2 + b\alpha)^m (K_1 - a\alpha)^m \alpha d\alpha = 0.$$

よって

$$\int_{\sqrt{(1-b/k_2)/2\lambda}}^{\sqrt{(1+b/k_2)/2\lambda}} h_2^{2m+1} (h(K_1, h_1^2))^2 (1 - 2\lambda h_2^2) dh_2 = 0$$

とすると,  $h^0 = \sqrt{(1 - b/k_2)/2\lambda}$ ,  $h^1 = \sqrt{(1 + b/k_2)/2\lambda}$  と

おく.  $[h^0, h^1]$  の近傍上で  $y(h_2)$  を

$$y(h_2) = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(hk_2h_1^2)^m} \int_{h^0}^{h_2} h_2^{2n+1}(hk_2h_1^2)^m(1-2\lambda h_2^2)dh$$

により定義すると,  $y(h^0) = y(h^1) = 0$  であり,  $h^0 < h_2 < h^1$

に対して,  $y(h_2) > 0$  となる. また  $\frac{dy}{dh_2}(h^0) > 0$ ,

$\frac{dy}{dh_2}(h^1) > 0$ .  $(h^0, h^1)$  上の関数  $\widehat{t}(h_2)$  を

$$\widehat{t}(h_2) = \int_{\sqrt{1/2\lambda}}^{h_2} \frac{1}{\sqrt{y(h_2)}} dh_2 \text{ により定義する.}$$

$$\widehat{t}_0 = \lim_{h_2 \rightarrow h^0+} \widehat{t}(h_2), \quad \widehat{t}_1 = \lim_{h_2 \rightarrow h^1-} \widehat{t}(h_2) \text{ は存在する.}$$

$[h^0, h^1]$  上の関数  $t(h_2)$  を

$$t(h_2) = \widehat{t}(h_2) - \widehat{t}_0, \quad t(h^0) = 0, \quad t(h^1) = \widehat{t}_1 - \widehat{t}_0 = L$$

により定義すると,  $t(h_2) : [h^0, h^1] \rightarrow [0, L]$  monotone increasing continuous function であり,  $(h^0, h^1)$  上で  $C^\infty$  となる.  $h_2(t)$  は  $t(h_2)$  の逆関数として,

$$(0, L) \text{ 上で } \frac{dh_2}{dt} = \sqrt{y(h_2)} \text{ となる. } h_2(t) \text{ は } [0, L] \text{ 上}$$

の正の値をとる  $C^\infty$  function であり,  $0, L$  上で偶関数となるものに拡張出来ることかわかる.

$f \in f = \frac{4k_2}{h} h_2 h_2'$  により定義し,  $h_1 > 0$  を  $2\lambda(ak_2h_2^2 + hk_1h_1^2) = ak_2 + h(k_1$  により定義すると,  $f, h_1, h_2$  は (2.4) を満たし, 条件 (2.2) も満たす. 従って, Einstein Kähler metric が

存在する。

### 3. Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係, その後の発展

Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係は, Koiso-Sakane [6] で調べられ, Main theorem は次のように拡張される。

**Theorem I.**  $X$  を compact Einstein Kähler manifold で,  $g_0$  を  $X$  上の Kähler metric でその Ricci tensor  $R_0$  が  $R_0 = g_0$  をみたすものとする。  $\xi$  を  $X$  上の holomorphic line bundle で,  $\xi$  の fiber metric に関する metric connection の curvature tensor  $B$  の  $g_0$  に関する固有値が,  $X$  上で constant でかつ, これらの固有値の絶対値が 1 より小さいような fiber metric が存在するものとする。このとき,  $X$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P = P(1 \oplus \xi)$  に Einstein Kähler metric が存在するための必要十分条件は, Futaki invariant

$f = \mathcal{O}(P, J) \rightarrow \mathbb{C}$  が 0 となることである。さらに, Futaki invariant が 0 となることは,

$$\int_{-1}^1 x \det(1 - x g_0^{-1} B) dx = 0$$

と同値である。

Theorem I の適用できる例をあげよう。

例 5.  $M$  を compact Einstein Kähler manifold とし、 $M$  上の line bundle  $L$  で、 $C_1(L) = a C_1(M)$  ( $0 < a < 1$ ) となるものが存在すると仮定する。  $X = M \times M$  とおき、 $\xi = L \oplus L^{-1}$  を  $L \rightarrow M$ ,  $L^{-1} \rightarrow M$  からひきおこされた  $X$  上の holomorphic line bundle とする。このとき、 $M$  上の Kähler metric  $g$  と  $\xi$  の Ricci tensor  $R$  が  $R = g$  を満たすものをとると、 $X$  上の product metric  $g_0 = g \oplus g$  に関して、Theorem I の仮定が満たされ、 $P(1 \oplus \xi)$  上に Einstein Kähler metric が存在すること、被積分関数  $\alpha \det(\text{id} - \alpha g_0^{-1} B)$  が奇関数となり、積分が 0 となることよりわかる。

例 6.  $M = P^n(\mathbb{C})$  とし、 $H$  を  $M$  上の hyperplane section line bundle とし  $L = H^m$  とおくと、 $X = M \times M$  上の  $P^1(\mathbb{C})$ -bundle  $P(L \oplus L)$  は Einstein Kähler metric を許容し、isometry group の action に関して cohomogeneity は 1 である。  $P = P(L \oplus L)$  の first Chern class  $C_1(P)$  は

$$C_1(P) = (n+1-m) \pi^*(C_1(H) \oplus C_1(H)) + 2 C_1(\zeta)$$

(ここに  $\pi: P \rightarrow X$  は projection,  $\zeta$  は  $P$  の各 fiber  $P^1(\mathbb{C})$  上

の hyperplane line bundle からひきおこされる  $P$  上の line bundle とする) で与えられる。従って  $n+1-m$  が偶数ならば,  $P$  上の holomorphic line bundle  $\eta$  で,  $C_1(\eta) = \frac{1}{2} C_1(P)$  なるものが存在する。  $P$  の  $k$  個の copy を考え,  $Y = P \times \cdots \times P$  ( $k$  個),  $\xi_0 = \xi \otimes \cdots \otimes \xi$  ( $k$  個) とかき,  $k$  が奇数のとき  $X = Y \times P^{\frac{(n+1)k}{2}}_{(\mathbb{C})}$ ,  $\xi = \xi_0^{-1} \otimes H^{\frac{(n+1)k+1}{2}}$  と ( $k$  が偶数のとき  $X = Y \times Q^{\frac{(n+1)k}{2}}_{(\mathbb{C})}$  ( $Q^l_{(\mathbb{C})}$  の  $l$  次元の complex hyperquadric),  $\xi = \xi_0^{-1} \otimes L_0^{\frac{(n+1)k}{2}}$  (ここに,  $L_0$  は  $Q^{\frac{(n+1)k}{2}}_{(\mathbb{C})}$  の holomorphic line bundle の群の generator で  $C_1(L_0)$  が正となるもの,  $C_1(Q^l_{(\mathbb{C})}) = l C_1(L_0)$  となることに注意) とかくと, Theorem I の条件と  $X, \xi$  はみたし, 被積分関数は  $\alpha \det(\text{id} - \alpha g_0^{-1} P) = \alpha (1 - \frac{1}{2} \alpha)^{2(n+1)k} (1 + \frac{1}{2} \alpha)^{2(n+1)k}$  で与えられ, これは奇関数であるから, 積分は 0 となり,  $P(1 \otimes \xi)$  は Einstein Kähler metric を許容し, Cohomogeneity は,  $k+1$  となる。すなわち, 与えられた cohomogeneity をもつ '既約' な Einstein Kähler manifold が存在する。

例 7. 最後に  $P^1_{(\mathbb{C})}$ -bundle の base space  $X$  が, 既約で, Einstein Kähler metric が  $P^1_{(\mathbb{C})}$ -bundle  $P$  に

存在するものの例をあけておく.  $X = SL(3, \mathbb{C})/B$ ,  
 ここに  $B$  は Borel subgroup とする.  $H^1(X, \mathcal{O}^*)$  を holomorphic  
 line bundle の isomorphism class のなす群等とすると,

$H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  となる.  $H_1, H_2$  を holomorphic  
 line bundle over  $X$  の generator とするもので,

$C_1(H_1) > 0, C_1(H_2) > 0, C_1(X) = 2(C_1(H_1) + C_1(H_2))$   
 とするものとする.  $\xi = H_1^{-1} \otimes H_2$  とおくと,  $X, \xi$  は  
 Theorem I の条件を満たし, この場合の  $B$  の  $\rho_0$  に関し  
 固有値は  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$  となる. 従って 積分は 0 となり,  
 $P(1 \otimes \xi)$  ( $X$  上の  $P(1, \mathbb{C})$ -bundle) は Einstein Kähler  
 metric を許容する.

## References

- [1] T. Aubin: Equation du type Monge-Ampère  
 sur les variétés kähleriennes compactes, Bull. Sc. Math.  
 102 (1978) 63-95.
- [2] S. Bando - T. Mabuchi: to appear.
- [3] L. Bérard Bergery: Sur de nouvelles variétés  
 riemanniennes d'Einstein, Preprint 1981.
- [4] A. Futaki: An obstruction to the existence of  
 Einstein Kähler metrics, Invent. Math. 73 (1983), 437-443.

- [5] K. Ishikawa and Y. Sakane: On complex projective bundles over a Kähler  $C$ -space, Osaka J. Math. 16 (1979) 121-132.
- [6] N. Koiso and Y. Sakane: Non-homogeneous Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds, to appear.
- [7] Y. Matsushima: Sur la structure du groupe d'homeomorphismes analytique d'une certaine variété kählérienne, Nagoya Math. J., 11 (1957) 145-150.
- [8] Y. Sakane: Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor, to appear.
- [9] S. T. Yau: On the curvature of compact Hermitian manifolds, Invent. Math. 25 (1974), 213-239.
- [10] S. T. Yau: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339-411.